Donc $\boxed{U_{n+2} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_{n+1} - 1)}$

•) $U_{n+2} - 1 = \dfrac{U_{n+1}^2 - U_{n+1} + 2}{1 + U_{n+1}} - 1$

$= \dfrac{U_{n+1}^2 - U_{n+1} + 2 - 1 - U_{n+1}}{1 + U_{n+1}}$

$= \dfrac{U_{n+1}^2 - 2U_{n+1} + 1}{1 + U_{n+1}}$

$= \dfrac{(U_{n+1} - 1)^2}{1 + U_{n+1}} > 0$

Donc $\boxed{U_{n+2} - 1 > 0}$

Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N};\ 0 < U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)}$

2) b) pour $n = 0$, on a :

$0 < U_0 - 1 = 2 - 1 = 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

(Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $0 < U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et montrons que $0 < U_{n+1} - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn